

中国科学院研究生院  
2012 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题  
科目名称：量子力学

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上均一律无效。

---

一、(共 30 分) 质量为  $\mu$  的粒子在一维无限深势阱中运动，势能

$$V = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a \\ \infty, & x < 0 \text{ 或 } x > a \end{cases}$$

- (1) 求粒子的能级和归一化波函数。
- (2) 画出处于第二、第三激发态的粒子的概率密度的示意图。
- (3) 求坐标算符在能量表象下的矩阵元。

二、(共 30 分) 质量为  $\mu$  的一维谐振子，带电  $q$ ，初始  $t = -\infty$  时处于基态  $|0\rangle$ 。设

加上微扰  $H' = -qEx \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right)$ ，其中  $E$  为外电场强度， $\tau$  为参数。求  $t = +\infty$  时

谐振子仍停留在基态的概率。

三、(共 30 分) 设一转动惯量为  $I$ 、电偶极矩为  $D$  的转子自由地在  $XY$  平面内转动，转角为  $\varphi$ 。

- (1) 试求其能量本征值和本征态。
- (2) 设沿  $X$  方向加上电场  $E$ ，即微扰哈密顿量为  $H' = -DE \cos \varphi$ ，试用微扰论求其基态能量的一级和二级微扰修正。

四、(共 30 分)

- (1) 写出角动量算符的三个分量  $J_x$ 、 $J_y$ 、 $J_z$  相互间满足的所有对易关系。
- (2) 试利用这些对易关系，证明矩阵元  $\langle m | J_x | n \rangle$  仅当  $m = n \pm 1$  时不为零。其中  $|m\rangle$ 、 $|n\rangle$  分别为  $J_z$  的本征值为  $m\hbar$ 、 $n\hbar$  的本征态。
- (3) 设角动量量子数  $j = 1$ 。已知在  $J_z$  的某一个本征态  $|m\rangle$  中， $J_x$  取值为 0 的概率为  $1/2$ 。求  $J_x$  取值为  $-\hbar$  的概率。

五、(共 30 分) 氢原子的哈密顿量为  $H_0 = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{e^2}{r}$  , 基态波函数及基态能量为

$$\psi_0(r) = (\pi a_0^3)^{-1/2} e^{-r/a_0}, E_0 = -\frac{e^2}{2a_0} = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2}, \text{其中 } a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2} \text{ 为第一 Bohr 轨道半径。}$$

设体系受到微扰  $H' = e\epsilon z$  的作用 (沿  $z$  方向加上均匀电场  $\epsilon$ ), 哈密顿量变成  $H = H_0 + H'$ 。

(1) 计算对易关系:  $[H_0, H']$  及  $[H', [H_0, H']]$ 。

(2) 计算  $\psi_0$  下的平均值:  $\langle H' \rangle_0$  及  $\langle H'^2 \rangle_0$ 。

(3) 取基态试探波函数为  $\psi(\lambda) = N(1 + \lambda H')\psi_0$ , 其中  $N$  为归一化常数。试以  $\lambda$  为变分参数, 用变分法求  $H$  的基态能量上限 (准确到  $\epsilon^2$  量级)。